二重ゼータ値, 二重 Eisenstein 級数, およびモジュラー形式(多重ゼータ値の研究)

金子, 昌信

数理解析研究所講究録
第 1549 巻 2007 年 31-46

二重ゼータ値，二重 Eisenstein 級数，およびモジュラー形式

金子 昌信 （九州大学数理学研究院）
Masanobu Kaneko (Kyushu University)

10年ほど前に Zagier 氏が [3]（や [2]）にモジュラー形式と二重ゼータ値の間の関係について書いておられる．ごく短い記述であるが，亡くなった荒川恒男氏はこれにいたく興味を持たれ，もっと詳しい話を聞きたいものと事あるごとに仰っていた．表題の二重 Eisenstein 級数は，数年前に私が Bonn に Zagier 氏を訪ねた折，[3] や [2] で述べられた関係をより深く理解し出来れば発展させるべく共同で計算を始めたものである．ところがその時の滞在は短く，その後も別の共同研究にかたをつけるのに追われて長らく頓挫したままになっていた．結局ささやかながら以下のような進展を見たのは荒川氏の亡くなられた翌年で，これを聞いて頂くことはもう叶わなかった．
謹んでこの小文を亡き荒川さんに捧げる．

二重ゼータ値は自然数の組 (k_1, k_2) に対して次の級数で与えられる実数である．

$$\zeta(k_1, k_2) = \sum_{m_1 > m_2 > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2}}.$$

常に $k_1 > 1$ と仮定し，これが収束を保証する．数 $k_1 + k_2$ を重さと称する． はじめ 18 世紀に Euler によって研究されたこの級数は今では「多重ゼータ値」

$$\zeta(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \sum_{m_1 > m_2 > \cdots > m_n > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \cdots m_n^{k_n}}$$

として一般化されているが，ここではもっぱら二重ゼータ値のみを考察の対象とする．

以下では $\zeta(k_1, k_2)$ の代わりにそれを $(2\pi\sqrt{-1})^{\text{重さ}}$ で割った

$$\widetilde{\zeta}(k_1, k_2) := (2\pi\sqrt{-1})^{-(k_1+k_2)}\zeta(k_1, k_2)$$

を中心的に考え，これも二重ゼータ値と呼ぶことにする．
まず次の空間を導入する．

定義　自然数 $k \geq 3$ に対し $\mathbb{Q}$ 上の線型空間 $\mathcal{DZ}_k$ を

$$\mathcal{DZ}_k = \sum_{i=2}^{k-1} \mathbb{Q}\widetilde{\zeta}(i, k-i)$$

で定義する．つまり重さが k の二重ゼータ値全体で $\mathbb{Q}$ 上張られる線型空間である．

[3] で述べられていること（に重さ奇数の場合も加えたもの）と数値例をもとに次のような予想が立てられる．

予想 (Zagier).　自然数 $k \geq 3$ に対し，

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{DZ}_k &= \left[\frac{k+1}{2}\right] - 1 - \dim_{\mathbb{C}} S_k(PSL_2(\mathbb{Z})) \\ &= \begin{cases} \dfrac{k}{2} - 1 - \dim_{\mathbb{C}} S_k(PSL_2(\mathbb{Z})) & \cdots\cdots \quad k\text{が偶数の時}, \\ \\ \dfrac{k-1}{2} & \cdots\cdots \quad k\text{が奇数の時}. \end{cases}\end{aligned}$$

ここで，$S_k(PSL_2(\mathbb{Z}))$ はモジュラー群 $PSL_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ k の尖点形式のなす $\mathbb{C}$ 上の線型空間である（k が奇数ならば $\{0\}$）．

以下において「二重 Eisenstein 級数」というものを導入し，それを用いて不等式

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{DZ}_k \leq \left[\frac{k+1}{2}\right] - 1 - \dim_{\mathbb{C}} S_k(PSL_2(\mathbb{Z}))$$

の証明を与える．Zagier 氏は [3] の線に沿った別の証明を持っておられ，さらに Gangl 氏と新しい知見も得ておられるようであるが私はまだ全体を把握していない．いずれ3人で共著論文を書くことにしている．以下における命題についても詳しい証明はその論文に譲るとする．

注意　逆向きの不等式が証明できれば予想は正しいということになるが，それには $\widetilde{\zeta}(i, k-i)$ 達の独立性を示さねばならず，周知のごとく今のと

ころ出来そうにない．すなわち $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{DZ}_k > 1$ であると証明できる k の値は一つもないのが現状である．

また k が偶数の時，$\dim S_k$ は大体 $k/12$ であるから，$\dim \mathcal{DZ}_k$ は大体 $5k/12$ と予想される．また k が奇数の時は予想次元は $(k-1)/2$ であるが，Euler の結果によって k が奇数の時 $\mathcal{DZ}_k$ は $\widetilde{\zeta}(3), \widetilde{\zeta}(5), \ldots, \widetilde{\zeta}(k)$ で張られることが分かるので，予想はこれらが独立であることである．

二重 Eisenstein 級数を定義するためにまず次のように格子点の大小関係を定義する．

定義 τ を上半平面 $\mathfrak{H}$ の点とする．τ と 1 で生成される格子の元 $\lambda = m\tau + n \in \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$ は

$$m > 0 \quad \text{または} \quad m = 0, n > 0 \quad \text{のとき正}$$

であるといい，$\lambda > 0$ と書く．これをもとに2つの元 $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$ の大小関係を

$$\lambda - \mu > 0 \quad \text{のとき} \quad \lambda > \mu$$

であると定める．

さて $k \geq 3$ に対する（一重）Eisenstein 級数 $G_k(\tau)$ と，$k \geq 3, l \geq 2$ に対する二重 Eisenstein 級数 $G_{k,l}(\tau)$ を

$$G_k(\tau) = \sum_{m\tau+n>0} \frac{1}{(m\tau+n)^k}$$

および

$$G_{k,l}(\tau) = \sum_{\substack{\lambda>\mu>0 \\ \lambda,\mu\in\mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z}}} \frac{1}{\lambda^k \mu^l}$$

で定める．

$k = 2$ のとき $G_k(\tau)$ を定義する級数は絶対収束しないので，和の順序を指定して

$$G_2(\tau) = \left(\sum_{m=0,n>0} + \sum_{m>0} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \right) \frac{1}{(m\tau+n)^2} = \zeta(2) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(m\tau+n)^2}$$

を定義とする．一般に$\zeta(k)$はRiemannゼータ値である．$G_{k,l}(\tau)$についても絶対収束しない場合にまで範囲を拡げないと不十分なのだが，$G_2(\tau)$のように和の順序を指定するやり方では煩わしいので，後に与えるFourier展開を外挿して定義とすることにする．

kが4以上の偶数のとき$G_k(\tau)$は$PSL_2(\mathbb{Z})$に関する重さkのモジュラー形式で，また$G_2(\tau)$は重さ2の準モジュラー形式（$G_2(-1/\tau) = \tau^2 G_2(\tau) - \pi i \tau$）であるが，$k$が奇数のときの$G_k(\tau)$はそのような保型性は持たない（しかし全格子点上の和を取っていないので0ではない，何か非自明な関数を与えている）．また$G_{k,l}(\tau)$も良い保型性は持たないものと思われる（但し周期1は持つ）．

さて$\widetilde{\zeta}(k_1, k_2)$と同じく，

$$\begin{aligned}
\widetilde{\zeta}(k) &= (2\pi\sqrt{-1})^{-k}\zeta(k), \\
\widetilde{G}_k(\tau) &= (2\pi\sqrt{-1})^{-k} G_k(\tau), \\
\widetilde{G}_{k,l}(\tau) &= (2\pi\sqrt{-1})^{-k-l} G_{k,l}(\tau)
\end{aligned}$$

とする．前述のごとく$\widetilde{G}_k(\tau)$, $\widetilde{G}_{k,l}(\tau)$は$\tau$の関数とみて周期1をもつので，$q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$でFourier展開される．$\widetilde{G}_k(\tau)$の展開はよく知られるように，

$$\widetilde{G}_k(\tau) = \widetilde{\zeta}(k) + \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n$$

で与えられる．ここで$\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$である．$2\pi\sqrt{-1}$のしかるべき冪で割った結果，定数項以外が有理数係数になっていることに注意する．また定数項もkが偶数の時はEulerの結果によって有理数である．kが奇数の時は純虚数であるが，その性格については何も知られていない．（$\zeta(3)$が無理数であることは証明されているが，$\zeta(3)/\pi^3$が無理数かは分かっていない．$\widetilde{\zeta}(k)$はkが奇数なら超越数であると予想されているようである.）

新たに記号を導入して

$$g_k = \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n$$

とおく．従って

$$\widetilde{G}_k(\tau)=\widetilde{\zeta}(k)+g_k.$$

命題 1–定義　$k\geq 5$ かつ $3\leq i\leq k-2$ とする．このとき $\widetilde{G}_{i,k-i}(\tau)$ の Fourier 展開は

$$\widetilde{G}_{i,k-i}(\tau)=\widetilde{\zeta}(i,k-i)+\frac{(-1)^k}{(i-1)!(k-i-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\rho_{i-1,k-i-1}(n)q^n$$
$$+\sum_{j=2}^{k-2}\left\{(-1)^{i+j}\binom{j-1}{i-1}+(-1)^{k+i}\binom{j-1}{k-i-1}+\delta_{j,k-i}\right\}\widetilde{\zeta}(j)\,g_{k-j}$$

で与えられる．ここに

$$\rho_{k,l}(n):=\sum_{\substack{a+b=n\\ a,b>0}}\sum_{\substack{u|a,\,v|b\\ \frac{a}{u}>\frac{b}{v}}}u^k v^l+\frac{1}{2}\delta_{l,1}(n\sigma_{k-2}(n)-\sigma_{k-1}(n))$$

とし，$\delta_{i,j}$ は Kronecker のデルタを表す．

この右辺は $k\geq 3,\ 2\leq i\leq k-1$ で意味を持ち上半平面上の関数を定める．そこで**これらの k,i の値に対しては $\widetilde{G}_{i,k-i}(\tau)$ をこの右辺で定義することにする．**

この q-展開級数は $\sqrt{-1}^k\mathbb{R}+q\mathbb{Q}[[q]]+\sqrt{-1}q\mathbb{R}[[q]]$ に属する．

$$\widetilde{G}_{i,k-i}(\tau)\ \textbf{の定数項が}\ \widetilde{\zeta}(i,k-i)\ \textbf{である}$$

ことに注意する．また後に k が偶数の時 $\widetilde{G}_{i,k-i}(\tau)$ の「虚部」を取り出すが，それは奇数 j についての $\widetilde{\zeta}(j)g_{k-j}$ の一次結合になっている．

命題 2 (シャッフル積)　$k\geq 4$ と $2\leq i\leq k/2$ について次の関係式が成り立つ．

(i) $\widetilde{G}_i(\tau)\,\widetilde{G}_{k-i}(\tau)=\widetilde{G}_{i,k-i}(\tau)+\widetilde{G}_{k-i,i}(\tau)+\widetilde{G}_k(\tau)$.

(ii) $\displaystyle \widetilde{G}_i(\tau)\,\widetilde{G}_{k-i}(\tau)=\sum_{j=2}^{k-1}\left\{\binom{j-1}{i-1}+\binom{j-1}{k-i-1}\right\}\widetilde{G}_{j,k-j}(\tau)$.

それぞれ多重ゼータ値で言うところの「級数シャッフル積（調和積）」，「積分シャッフル積」に対応している．証明はq-展開を用いて直接計算する．(i) は絶対収束する場合は定義級数を使えば多重ゼータ値のときと同様簡単に出来るが，そうでない場合が厄介である．また (ii) も定義級数を使うとすると，部分分数分解を用いたやり方があるが，その場合左辺の積の両方が絶対収束していても，部分分数分解の項にそうでないものが現れるのが避けられず，更に厄介なことになる．多重ゼータ値のように反復積分のシャッフル積としての解釈が成り立つのか，よく分からない．

系　$k \geq 4$ と $2 \leq i \leq k/2$ に対して「複シャッフル関係式」

$$\sum_{j=2}^{k-1}\left\{\binom{j-1}{i-1}+\binom{j-1}{k-i-1}-\delta_{i,j}-\delta_{k-i,j}\right\}\widetilde{G}_{j,k-j}(\tau)-\widetilde{G}_k(\tau)=0$$

が成り立つ．

この関係式において Fourier 展開の定数項を取り出せば，二重ゼータ値の複シャッフル関係式が得られる．また命題 2 の (i)，(ii) で形式的に $i=1$ とおいて差を取ると発散項が打ち消して，いわゆる「和公式」

$$\sum_{j=2}^{k-1}\zeta(j,k-j)=\zeta(k)$$

が得られる．（このプロセスは「正規化複シャッフル関係式」として正当化される.）ところがこの和公式を単純に Eisenstein 級数に持ち上げた式 $\sum_{j=2}^{k-1}\widetilde{G}_{j,k-j}(\tau)=\widetilde{G}_k(\tau)$ は成り立っておらず，次の命題のような修正項が入る．

命題 3 （和公式）　$k \geq 3$ に対し

$$\sum_{j=2}^{k-1}\widetilde{G}_{j,k-j}(\tau)=\widetilde{G}_k(\tau)-\frac{\widetilde{G}'_{k-2}(\tau)}{2(k-2)},\qquad \left({}'=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\frac{d}{d\tau}=q\frac{d}{dq}\right)$$

が成り立つ．

$\widetilde{G}'_{k-2}(\tau)$ は $\widetilde{G}_{k-2}(\tau)$ の微分であるから定数項は 0, 従って命題の定数項を取ると和公式になるのである．

証明はやはり q-展開を用いてひたすら計算する．やり方が悪いのか命題 2 よりも更に複雑になるが，べき乗和の公式その他いろいろ使って面白くもある．

命題 3 と，(一重 Eisenstein 級数についての) Ramanujan の等式 ([1] 参照) を使うと，和公式の精密化が得られる．

系 1 k は偶数とする．

(i)
$$\sum_{\substack{j=2 \\ j:even}}^{k-2} \widetilde{G}_{j,k-j}(\tau) = \frac{3}{4}\widetilde{G}_k(\tau) - \frac{1}{2(k-2)}\widetilde{G}'_{k-2}(\tau).$$

(ii)
$$\sum_{\substack{j=3 \\ j:odd}}^{k-1} \widetilde{G}_{j,k-j}(\tau) = \frac{1}{4}\widetilde{G}_k(\tau).$$

定数項を取れば

$$\sum_{\substack{j=2 \\ j:even}}^{k-2} \zeta(j,k-j) = \frac{3}{4}\zeta(k), \quad \sum_{\substack{j=3 \\ j:odd}}^{k-1} \zeta(j,k-j) = \frac{1}{4}\zeta(k)$$

を得る．

定義 $k \geq 3$ に対し

$$\mathcal{DE}_k = \sum_{i=2}^{k-1} \mathbb{Q}\,\widetilde{G}_{i,k-i}(\tau)$$

とおく ($\widetilde{G}_{i,k-i}(\tau)$ で張られる $\mathbb{Q}$-線型空間)．

ここまで準備した上ではじめに述べた不等式，すなわち

定理 1 (Zagier)　自然数 $k \geq 3$ に対し，

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{DZ}_k \leq \left[\frac{k+1}{2}\right] - 1 - \dim S_k(PSL_2(\mathbb{Z})).$$

これの証明にかかる．それは次の二つの命題から導かれる．

命題 4　線型空間の包含

$$S_k^{\mathbb{Q}}(PSL_2(\mathbb{Z})) \oplus \mathbb{Q}\widetilde{G}_k(\tau) \oplus \mathbb{Q}\,\widetilde{G}'_{k-2}(\tau) \subseteq \mathcal{DE}_k$$

が成り立つ．ここに $S_k^{\mathbb{Q}}(PSL_2(\mathbb{Z}))$ は，$PSL_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ k の尖点形式で Fourier 係数が有理数であるもの全体のなす $\mathbb{Q}$ 上の線型空間である（くどいようだが k が奇数なら $\{0\}$ である）．

$S_k^{\mathbb{Q}}(PSL_2(\mathbb{Z}))$ と $\widetilde{G}_k(\tau)$ を一緒にしてモジュラー形式の空間として記述しないのは，k が奇数のときモジュラー形式は存在しないが $\widetilde{G}_k(\tau)$ は 0 ではないからである．

<u>証明</u>　命題 2 と 3 から $\mathcal{DE}_k \ni \widetilde{G}_k, \widetilde{G}'_{k-2}, \widetilde{G}_i \cdot \widetilde{G}_{k-i}$ $(4 \leq i \leq k/2)$ であることが分かる．k が偶数のとき，Rankin による，尖点形式と $\widetilde{G}_i \cdot \widetilde{G}_{k-i}$ との Petersson 内積の計算と，Eichler-Shimura の定理を使うと，すべての $\widetilde{G}_i \cdot \widetilde{G}_{k-i}$ (i は偶数, $4 \leq i \leq k/2$) と直交する尖点形式は 0 であることが分かるので，$S_k^{\mathbb{Q}}(PSL_2(\mathbb{Z}))$ は $\widetilde{G}_i \cdot \widetilde{G}_{k-i}$ (i は偶数, $4 \leq i \leq k/2$) で張られることが言える．k が偶数のとき，$\widetilde{G}'_{k-2}(\tau)$ はモジュラー形式ではなく（準モジュラー形式），$S_k^{\mathbb{Q}}(PSL_2(\mathbb{Z}))$, $\widetilde{G}_k(\tau)$ とは独立である．また k が奇数のとき $\widetilde{G}_k(\tau)$ は定数項を持ち $\widetilde{G}'_{k-2}(\tau)$ は持たないから，この二つは独立である．従って命題 4 が得られる．　□

命題 5　$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{DE}_k = [(k+1)/2]$.

<u>証明</u>　まず線型空間 $\mathcal{DE}_k$ は $\widetilde{G}_{i,k-i}(\tau)$ $([k/2]+2 \leq i \leq k-1)$ および $\widetilde{G}_k(\tau)$,

$\widetilde{G}'_{k-2}(\tau)$ で張られる[1]．それは，命題2の系の「i番目」($2 \leq i \leq [k/2]$) の関係式において，$2 \leq j \leq i$ なる j に対する $\widetilde{G}_{j,k-j}(\tau)$ の係数は0であり，これと命題3から，$2 \leq j \leq [k/2]+1$ なる j に対する $\widetilde{G}_{j,k-j}(\tau)$ は残りの $\widetilde{G}_{i,k-i}(\tau)$ ($[k/2]+2 \leq i \leq k-1$) および $\widetilde{G}_k(\tau)$, $\widetilde{G}'_{k-2}(\tau)$ で書けることが分かるからである．これら生成元の個数は $[(k+1)/2]$ で，後で見るようにその「虚数部」に着目すればその独立性が分かる． □

いま写像

$$\pi_1 : \mathcal{DE}_k \longrightarrow \mathcal{DZ}_k,$$

ここに，$f \in \mathcal{DE}_k$ に対し

$$\pi_1(f) = f \text{ の Fourier 展開の定数項},$$

を考えると，$\widetilde{G}_{i,k-i}(\tau)$ の Fourier 展開（命題1）から π_1 は全射で，完全系列

$$0 \longrightarrow \ker \pi_1 \longrightarrow \mathcal{DE}_k \xrightarrow{\pi_1} \mathcal{DZ}_k \longrightarrow 0$$

を得る．命題4より $\ker \pi_1$ は $S_k^{\mathbb{Q}}(PSL_2(\mathbb{Z}))$ と $\widetilde{G}'_{k-2}(\tau)$ を含むことが分かるから $\dim \ker \pi_1 \geq \dim S_k(PSL_2(\mathbb{Z})) + 1$ で，命題5から $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{DE}_k = [(k+1)/2]$ なのであるから，この完全系列より定理の不等式が従う．（定理1の証明終わり）

定理1の不等式で等号が成り立つためには $\ker \pi_1 = S_k^{\mathbb{Q}}(PSL_2(\mathbb{Z})) \oplus \mathbb{Q}\,\widetilde{G}'_{k-2}(\tau)$ が成り立つことが必要十分である．

以下残りの紙幅で，別の見方からモジュラー形式との関係を論じる．こちらは定理1の証明には直接結びつかないものの，より具体的に二重ゼータ値の関係式を与えることが出来，また副産物として Ramanujan の関数 $\tau(n)$ の多分新しい（しかしあまり美しくはない）公式を与えることが出来る．

[1]ある理由からはじめ別の基底を取ろうとしており，そうするとそれらで張られることを示すのに必要なある行列式が非0なることが示せずにいた（それは未だに示せていない）．しかし以下の定理1の証明のためにはそれは不要で，ここにあるような生成元の取り方をすればそれらで $\mathcal{DE}_k$ が張られることは殆んど自明であった．これは研究会の折数理研の安田正大氏が指摘して下さった.（我が不明を恥じつつ）記して感謝する次第である．

以下ではkは偶数（4以上）とする.

こんどは写像

$$\pi_2 : \mathcal{DE}_k \longrightarrow \Im\mathcal{DE}_k,$$

ここで

$$\pi_2(f) = f \text{ の Fourier 展開の虚数部},$$

を考える. $\Im\mathcal{DE}_k$ は $\mathcal{DE}_k$ の虚数部で, Fourier 展開により $\mathbb{C}[[q]]$ の部分空間と見ている(虚数部というとき, $\sqrt{-1}$ の係数ではなく $\sqrt{-1}$ が掛かったままの部分を指すことにする). 定義から

$$0 \longrightarrow \ker \pi_2 \longrightarrow \mathcal{DE}_k \xrightarrow{\pi_2} \Im\mathcal{DE}_k \longrightarrow 0$$

が完全である.

命題3（和公式）より $\widetilde{G}_{k-1,1}(\tau)$ の虚数部は他の $\widetilde{G}_{i,k-i}(\tau)$ $(2 \leq i \leq k-2)$ の虚数部の一次結合なので（$\widetilde{G}_k$, $\widetilde{G}'_{k-2}$ は虚数部を持たないことに注意）, これら $\widetilde{G}_{i,k-i}(\tau)$ $(2 \leq i \leq k-2)$ の写像 π_2 による行き先を考えると, それらは

$$\begin{aligned}
&{}^t(\pi_2(\widetilde{G}_{2,k-2}), \pi_2(\widetilde{G}_{3,k-3}), \ldots, \pi_2(\widetilde{G}_{k-2,2})) \\
&\qquad = Q_k \cdot {}^t(\widetilde{\zeta}(3)g_{k-3}, \widetilde{\zeta}(5)g_{k-5}, \ldots, \widetilde{\zeta}(k-3)g_3),
\end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned}
Q_k &:= \left(\delta_{k-i,j} + (-1)^{i+j}\binom{j-1}{i-1} + (-1)^{k+i}\binom{j-1}{k-i-1}\right)_{\substack{2\leq i\leq k-2 \\ 2\leq j\leq k-2,\ j:odd}} \\
&= \left(\delta_{k-2-i,2j} + (-1)^{i}\binom{2j}{i} - (-1)^{i}\binom{2j}{k-2-i}\right)_{\substack{1\leq i\leq k-3 \\ 1\leq j\leq k/2-2}}
\end{aligned}$$

となる. Q_k は整数成分の $(k-3) \times (k/2-2)$ 次行列である.

じつに玄妙なことに, この行列が尖点形式に対応する「周期多項式」の係数がみたすべき条件式の係数行列そのものになっていて, 次の定理が成り立つ.

定理 2　行列 Q_k を $\mathbb{Q}^{k/2-2}$ から $\mathbb{Q}^{k-3}$ への一次変換とみたとき，

$$\dim\ker Q_k = \dim S_k(PSL_2(\mathbb{Z})),$$

あるいは

$$\operatorname{rank} Q_k = k/2 - 2 - \dim S_k(PSL_2(\mathbb{Z})).$$

系. $\dim \Im\mathcal{DE}_k = k/2-2-\dim S_k(PSL_2(\mathbb{Z}))$ で, $\ker\pi_2 = S_k^{\mathbb{Q}}(PSL_2(\mathbb{Z}))\oplus \mathbb{Q}\widetilde{G}_k(\tau)\oplus\mathbb{Q}\widetilde{G}'_{k-2}(\tau)$ となる.

これは簡単な線形代数である. 虚数部分は $\widetilde{\zeta}(3)g_{k-3}, \widetilde{\zeta}(5)g_{k-5}, \ldots, \widetilde{\zeta}(k-3)g_3$ の一次結合であるが，これらは $\mathbb{C}$ 上でも一次独立である. それは例えば素数を必要なだけ選んで，その次数の係数行列を見ると本質的に Vandermonde 行列式になることから分かる（これは Zagier 氏による注意）.

<u>定理の証明</u>　まず簡単に周期多項式について復習する.

$f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n \in S_k(PSL_2(\mathbb{Z}))$ に対して

$$r_f(X) := \int_0^{\infty} f(\tau)(\tau - X)^{k-2}\, d\tau$$

を f の周期多項式と言う. これは $f(\tau)$ に対応する L 関数の $0 < j < k$（臨界領域）にある整数点 j での値の母関数である. すなわち

$$r_j(f) := \int_0^{\infty} f(\tau)\tau^j\, d\tau$$

とおくと

$$r_j(f) = \sqrt{-1}^{\,j+1} L^*(f, j+1), \quad L^*(f,s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$$

であり，

$$r_f(X) = \sum_{j=0}^{k-2}(-1)^j\binom{k-2}{j} r_j(f) X^{k-2-j}.$$

多項式 $P(X)$ への $PSL_2(\mathbb{Z})$ の作用を $A=\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in PSL_2(\mathbb{Z})$ に対し

$$(P|A)(X) = (P|_{2-k}A)(X) := (cX+d)^{k-2} P\left(\frac{aX+b}{cX+d}\right)$$

で定義する．$PSL_2(\mathbb{Z})$ の生成元を $S := \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$，$U := \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ $(S^2 = U^3 = 1)$ と書くとき，$r_f(X)$ が

$$r_f|(1+S) = r_f|(1+U+U^2) = 0$$

をみたすことは容易に分かる．記法は作用を群環の元に自然に拡張したとして理解する．そこで，V_k を $\mathbb{C}[X]$ の $k-2$ 次以下の多項式全体の空間としてその部分空間 W_k を

$$W_k := \left\{P \in V_k \mid P|(1+S) = P|(1+U+U^2) = 0\right\}$$

として定義する．これも簡単に分かるが，W_k の元はその偶数次部分，奇数次部分がそれぞれ W_k に属し，従って $W_k^{\pm}$ を各々 W_k の元で偶，奇多項式全体とすると，

$$W_k = W_k^+ \oplus W_k^-$$

と直和分解する．そうして，Eichler-Shimura 理論の教えるところは，

$$r^- : \ S_k(PSL_2(\mathbb{Z})) \ni f \mapsto r_f(X) \text{ の奇数次部分 } \in W_k^-$$

は同型，

$$r^+ : \ S_k(PSL_2(\mathbb{Z})) \ni f \mapsto r_f(X) \text{ の偶数次部分 } \in W_k^+$$

は単射かつ余次元 1 で，

$$W_k^+ = r^+(S_k) \oplus \mathbb{C}(X^{k-2}-1).$$

また $W_k^{+,0} := \{P \in W_k^+ \mid P(0) = 0\}$ とおくと，$P|(1+S) = 0$ の条件から $P(X)$ の X^{k-2} の係数も 0 で，

$$W_k^+ = W_k^{+,0} \oplus \mathbb{C}(X^{k-2}-1)$$

となる． 特に $\dim W_k^{+,0} = \dim S_k$ である．($W_k^{+,0} = r^+(S_k)$ ではない.)

いま，$P(X)=\sum_{\substack{j=2\\ j:\,even}}^{k-4} a_j X^j$ が $W_k^{+,0}$ に入る条件 $P|(1+S)=P|(1+U+U^2)=0$ は，一つの条件式 $P|(S-U+SU^2)=0$ にまとめることが出来て，これを書き下すと丁度

$$Q_k\cdot {}^t(a_2,a_4,\cdots,a_{k-4})={}^t(0,0,\cdots,0)$$

となるのである．従って $\dim\ker Q_k=\dim W_k^{+,0}=\dim S_k$ となり，定理が証明された． □

最後の等式で Eichiler-Shimura を使ったが，初等的に $\dim W_k^{+,0}$ を計算することも出来る．それが $\dim S_k$ の知られた値に等しいという言い方も出来るのであるが，それにしても二重 Eisenstein 級数の Fourier 展開から取り出した Q_k と周期多項式の結びつきは印象的である．計算してみたらそうなっていた，と言う以外の，本質を衝いた説明が出来るのであろう．

上に述べたごとく，行列 Q_k の右からの零化ベクトルは（偶）周期多項式を与えるが，左からの零化ベクトルは二重 Eisenstein 級数の一次結合で虚数部を消すもの，つまり $S_k^{\mathbb{Q}}(PSL_2(\mathbb{Z}))\oplus\mathbb{Q}\widetilde{G}_k(\tau)\oplus\mathbb{Q}\widetilde{G}_{k-2}(\tau)$ の元で書けるものを与える．その一次結合の定数項を取れば二重ゼータ値の関係式が得られる．

$k=12$ のときの例を見よう．

$$Q_{12}=\begin{pmatrix}-2&-4&-6&-8\\1&6&15&28\\0&-4&-20&-48\\0&1&15&42\\0&0&0&0\\0&0&-14&-42\\0&4&20&48\\0&-6&-15&-27\\2&4&6&8\end{pmatrix}.$$

右零化ベクトルとして ${}^t(1,-3,3,-1)$ がとれ，これは

$$X^8-3X^6+3X^4-X^2\in W_{12}^+$$

に対応する．

左零化域は 6（$=k/2-1+\dim S_k$）次元で，基底として

$$\begin{array}{ll}(1,0,0,0,0,0,0,0,1), & (0,0,7,28,0,20,0,0,0)\\ (0,0,1,0,0,0,1,0,0), & (15,30,6,0,0,0,0,16,0)\\ (0,0,0,0,1,0,0,0,0), & (5,10,12,8,0,0,0,0,0)\end{array}$$

がとれる．左の列の三つは通常の Eisenstein 級数の積から来るものである．例えば最初の $(1,0,0,0,0,0,0,0,1)$ は，$\widetilde{G}_{2,10}(\tau)+\widetilde{G}_{10,2}(\tau)$ が $\mathbb{Q}$-係数ということを言っているが，それは命題 2(i) より $\widetilde{G}_{2,10}(\tau)+\widetilde{G}_{10,2}(\tau)=\widetilde{G}_2(\tau)\widetilde{G}_{10}(\tau)-\widetilde{G}_{12}(\tau)$ であるので明らかである．それ以外の例として右の列の最初のものをとると，対応して

$$7\widetilde{G}_{4,8}(\tau)+28\widetilde{G}_{5,7}(\tau)+20\widetilde{G}_{7,5}(\tau)=\frac{3\cdot 11\cdot 149}{2^2\cdot 691}\widetilde{G}_{12}(\tau)-\frac{1}{2^7\cdot 3^2\cdot 5\cdot 691}\Delta(\tau)$$

という関係式が計算される（$\Delta(\tau)=q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}$）．これより

$$\begin{aligned}\Delta(\tau) &= 2^5\cdot 3^3\cdot 5\cdot 11\cdot 149\,\widetilde{G}_{12}(\tau)-2^7\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 691\,\widetilde{G}_{4,8}(\tau)\\ &\quad -2^9\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 691\,\widetilde{G}_{5,7}(\tau)-2^9\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 691\,\widetilde{G}_{7,5}(\tau)\end{aligned}$$

なので，この Fourier 係数を較べて，$\Delta(\tau)$ の q^n の係数 $\tau(n)$ の（多分新しい）公式

$$\begin{aligned}\tau(n) &= \frac{149}{840}\sigma_{11}(n)-\frac{691}{180}\sigma_7(n)-\frac{11747}{126}\sigma_5(n)+\frac{173441}{360}\sigma_3(n)\\ &\quad -\frac{3455}{9}\sigma_1(n)-\frac{2764}{3}\rho_{3,7}(n)-\frac{19348}{3}\rho_{4,6}(n)-\frac{13820}{3}\rho_{6,4}(n)\\ &= \frac{149}{2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\sigma_{11}(n)-\frac{691}{2^2\cdot 3^2\cdot 5}\sigma_7(n)-\frac{17\cdot 691}{2\cdot 3^2\cdot 7}\sigma_5(n)\\ &\quad +\frac{251\cdot 691}{2^3\cdot 3^2\cdot 5}\sigma_3(n)-\frac{5\cdot 691}{3^2}\sigma_1(n)-\frac{2^2\cdot 691}{3}\rho_{3,7}(n)\\ &\quad -\frac{2^2\cdot 7\cdot 691}{3}\rho_{4,6}(n)-\frac{2^2\cdot 5\cdot 691}{3}\rho_{6,4}(n),\end{aligned}$$

ここに

$$\rho_{k,l}(n) := \sum_{\substack{a+b=n \\ a,b>0}} \sum_{\substack{u|a,\, v|b \\ \frac{a}{u} > \frac{b}{v}}} u^k v^l,$$

が得られる.

また，一番簡単な $(0,0,0,0,1,0,0,0,0)$ に対応して（あるいは $\widetilde{G}_{6,6}(\tau) = (\widetilde{G}_6(\tau)^2 - \widetilde{G}_{12}(\tau))/2$ より）

$$\widetilde{G}_{6,6}(\tau) = \frac{2^2 \cdot 3}{691} \widetilde{G}_{12}(\tau) - \frac{1}{2^7 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 691} \Delta(\tau)$$

であり，これより

$$\Delta(\tau) = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \, \widetilde{G}_{12}(\tau) - 2^7 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 691 \, \widetilde{G}_{6,6}(\tau),$$

この係数を較べて

$$\begin{aligned} \tau(n) &= \frac{2}{693} \sigma_{11}(n) + \frac{691}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 7} \sigma_5(n) - \frac{691}{2^2 \cdot 3^2} \sigma_3(n) + \frac{5 \cdot 691}{2 \cdot 3^2 \cdot 11} \sigma_1(n) \\ &- \frac{2 \cdot 691}{3} \rho_{5,5}(n) \end{aligned}$$

が得られる. $693 = 691+2$ なので，有名な合同式 $\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \pmod{691}$ も直ちに見て取れる.

他の例として $(5,10,12,8,0,0,0,0,0)$ を取ると

$$\begin{aligned} &5\widetilde{G}_{2,10}(\tau) + 10\widetilde{G}_{3,9}(\tau) + 12\widetilde{G}_{4,8}(\tau) + 8\widetilde{G}_{5,7}(\tau) \\ &\qquad = \frac{41 \cdot 1321}{2^2 \cdot 3 \cdot 691} \widetilde{G}_{12}(\tau) + \frac{1}{2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 691} \Delta(\tau) - \frac{1}{4} \widetilde{G}'_{10}(\tau) \end{aligned}$$

が成り立ち，定数項の比較から

$$5\zeta(2,10) + 10\zeta(3,9) + 12\zeta(4,8) + 8\zeta(5,7) = \frac{41 \cdot 1321}{2^2 \cdot 3 \cdot 691} \zeta(12)$$

が得られ， q^n の係数を較べればまた別の $\tau(n)$ の公式が得られる，など.

より多重の Eisenstein 級数を計算すると何が得られるであろうか.

参考文献

[1] N.-P. Skoruppa, A quick combinatorial proof of Eisenstein series identities, *J. Number Theory*, **43**, (1993), 68–73.

[2] D. Zagier, Periods of modular forms, trace of Hecke operators, and multiple zeta values, *RIMS Kokyuroku*, **843**, (1993), 162–170.

[3] D. Zagier, Values of zeta functions and their applications, in *First European Congress of Mathematics, Volume II*, *Progress in Math.*, **120**, (1994), 497-512.